PART2 共役複素数の性質

要点整理と公式

要点① 共役な複素数の性質

複素数 $z=a+bi$ に対し，$a-bi$ を z に「　　　」な複素数といい，　　と表す。また，$\overline{z}$ は z の「　　　複素数」という。

複素数 α，β と，共役な複素数 $\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ について，次のことが成り立つ。

共役な複素数の性質①

[1] $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　[2] $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

[3] $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　　[4] $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とする。

$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ より $\overline{\alpha+\beta}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$　　よって，[1]が成立

$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$ より $\overline{\alpha-\beta}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i$　　よって，[2]が成立

$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$　　　　　　　より

$\overline{\alpha\beta}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i$

よって，[3]が成立

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i \text{ より}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{ac+adi-bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

よって，[4] が成立

[3] より，複素数 α について $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$ が成り立つ。

複素数 $z=a+bi$ に対して

$\overline{z}=a-bi$

$-z=-a-bi$

$-\overline{z}=-a+bi$

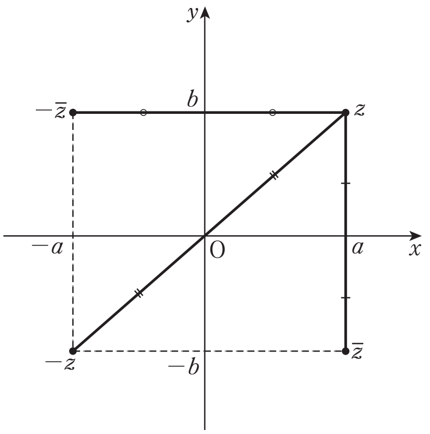
である。これらを複素数平面上に図示すると，

次のことが成り立つ。

点 z と点 $\overline{z}$ は　　　に関して対称

点 z と点 $-z$ は　　　に関して対称

点 z と点 $-\overline{z}$ は　　　に関して対称



また，このことより，次のことが成り立つ。

共役な複素数の性質②

z が実数 $\iff$ $\overline{z}=z$

z が純虚数 $\iff$ $\overline{z}=-z$ かつ $z\neq 0$

このことは，次のように示すこともできる。

複素数 $z=a+bi$ … ①に対して，$\overline{z}=a-bi$ … ②

①＋②より $z+\overline{z}=2a$　　　よって $a=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

①－②より $z-\overline{z}=2bi$　　　よって $b=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

したがって，複素数 $z=a+bi$ が

実数 $\iff$ $b=0$ $\iff$ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=0$ $\iff$ $\overline{z}=z$

純虚数 $\iff$ $a=0$ $\iff$ $\dfrac{z+\overline{z}}{2}=0$ $\iff$ $\overline{z}=-z$　　　（ただし $z\neq 0$）

(ex) 複素数 α，β について，$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta(\neq 0)$ が純虚数であることを示す。

$z=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ とおくと，$z\neq 0$

$$\overline{z}=\overline{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=-(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)=-z$$

よって，z は純虚数である。

2 (1) 複素数 z が $2z+\overline{z}=4+i$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(i) $2\overline{z}+z$ を求めよ。　　(ii) z を求めよ。

(2) 点 $-2+3i$ と実軸，原点，虚軸に関して対称な点を表す複素数を求めよ。

Point Pickup

共役な複素数の性質①

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\quad \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta},\quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

共役な複素数の性質②

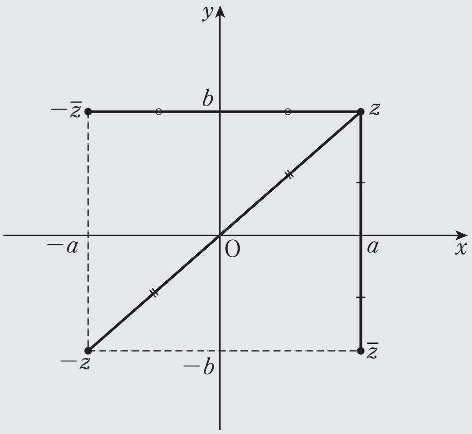
点 z と実軸に関して対称な点は点

点 z と原点に関して対称な点は点

点 z と虚軸に関して対称な点は点

z が実数 $\iff$ $\overline{z}=z$

z が純虚数 $\iff$ $\overline{z}=-z$ かつ $z\neq 0$



第 5 講　PART2 確認問題

1　複素数 z が $z+2\overline{z}=3-4i$ を満たすとき，$\overline{z}+2z$ の値は

［ア］である。したがって，$z=$［イ］である。

［ア］，［イ］は下の①～④のうちから選べ。

[［ア］の選択肢]

① $3+4i$　② $3-4i$

③ $-3+4i$　④ $-3-4i$

[［イ］の選択肢]

① $1+2i$　② $1+4i$

③ $-1-4i$　④ $3+12i$

2　点 $-5+3i$ と実軸に関して対称な点を表す複素数は［ウ］である。

［ウ］は下の①～④のうちから選べ。

① $5+3i$　② $5-3i$

③ $-5-3i$　④ $-3+5i$

3　点 $-5+3i$ と原点に関して対称な点を表す複素数は［エ］である。

［エ］は下の①～④のうちから選べ。

① $5+3i$　② $5-3i$

③ $-5-3i$　④ $3-5i$

4 点 $-5+3i$ と虚軸に関して対称な点を表す複素数は オ である。

オ は下の①～④のうちから選べ。

① $5+3i$　　② $5-3i$

③ $-5-3i$　　④ $3-5i$

[MEMO]

PART2 共役複素数の性質

2 (1) 複素数 z が $2z+\overline{z}=4+i$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(i) $2\overline{z}+z$ を求めよ。　(ii) z を求めよ。

(2) 点 $-2+3i$ と実軸，原点，虚軸に関して対称な点を表す複素数を求めよ。

[解答]

(1)(i) $2z+\overline{z}=4+i$ の両辺の共役複素数を考えると

$\overline{2z+\overline{z}}=\overline{4+i}$　よって　$2\overline{z}+z=4-i$

(ii) $2z+\overline{z}=4+i$ ……①　$z+2\overline{z}=4-i$ ……②

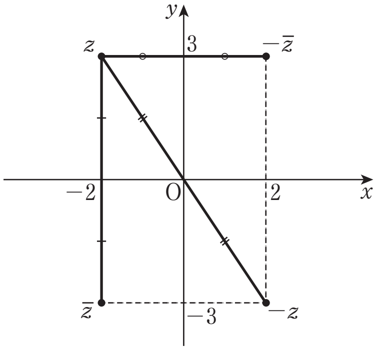
①×2−②より　$3z=4+3i$　よって $z=\dfrac{4+3i}{3}=\dfrac{4}{3}+i$

(2) $z=-2+3i$ とおくと

実軸に関して対称な点を表す複素数は $\overline{z}=-2-3i$

原点に関して対称な点を表す複素数は $-z=2-3i$

虚軸に関して対称な点を表す複素数は $-\overline{z}=2+3i$



第 5 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：②

[解説]

$z+2\overline{z}=3-4i$ ……①

この両辺の共役複素数を考えると，

$\overline{z+2\overline{z}}=\overline{3-4i}$

$\overline{z}+2\overline{\overline{z}}=3+4i$ [A]

$\overline{z}+2z=\mathbf{3+4i}$ ……②

①−②×2 より，[B]

$-3z=-3-12i$

$z=\mathbf{1+4i}$

[A]　共役な複素数の性質
[1]　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$
[2]　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$
[3]　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$
[4]　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

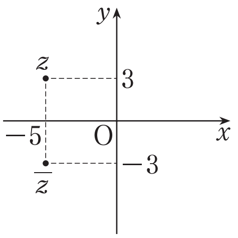
[B]　z と $\overline{z}$ についての連立方程式を解くことを考える。

2　**[正解]** ウ：③

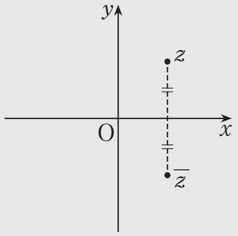
[解説]

$z=-5+3i$ とおくと，点 z と実軸に関して対称な点を表す複素数は，[C]

$\overline{z}=\mathbf{-5-3i}$



[C]　点 z と実軸に関して対称な点は，点 $\overline{z}$

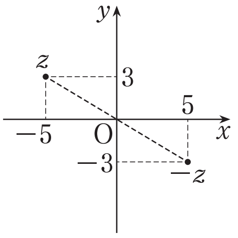


3　**[正解]** エ：②

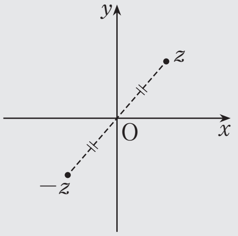
[解説]

$z=-5+3i$ とおくと，点 z と原点に関して対称な点を表す複素数は，[D]

$-z=\mathbf{5-3i}$



[D]　点 z と原点に関して対称な点は，点 $-z$



4

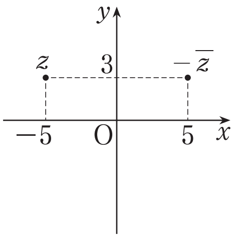
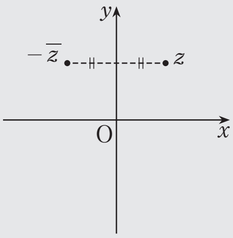
[正解] オ：①

[解説]

$z=-5+3i$ とおくと，

点 z と虚軸に関して対称な点を表す複素数は，[E]

$$-\overline{z}=5+3i$$



[E]　点 z と虚軸に関して対称な点は，点 $-\overline{z}$